

Liceo scientifico P. Bottoni, Anno scolastico 2007/2008

Reggio Luca, classe V sezione C

Teoria degli Invarianti

Materie coinvolte: Storia dell'Arte, Matematica, Fisica

0. INTRODUZIONE

1. M.C. ESCHER

- 1.1. La vita
- 1.2. Le fasi artistiche
- 1.3. I temi
- 1.4. La Gestalt ed Escher

2. ANALISI DI UN'OPERA - Pretententoonstelling

- 2.1. Descrizione dell'opera
- 2.2. Insieme \mathbb{C} , Esponenziale complesso
- 2.3. Genesi matematica di "Galleria di stampe"

3. SIMMETRIA FISICA

- 3.1. Funzione d'onda ψ e simmetrie di Gauge
- 3.2. Definizione di simmetria e relazione con i principi di conservazione
- 3.3. Invarianti nella Relatività Ristretta

4. CONCLUSIONE

5. ALLEGATI

- 5.1. Dimostrazione della Formula di Eulero
- 5.2. Estratto da "Gödel, Escher, Bach" di Hofstadter

6. BIBLIOGRAFIA

0. INTRODUZIONE

L'argomento trattato in questo scritto è tanto diffuso ed evidente in natura, quanto sottile e nascosto sotto l'apparenza in altri ambiti o in precise situazioni che andremo ad esaminare. Tale argomento è quello delle simmetrie, le quali si configurano in modo più specifico in elementi periodici, invarianti o ricorsivi a seconda delle differenti sfaccettature: la scelta del titolo è un richiamo all'argomento conclusivo dell'elaborato, cioè la teoria della relatività speciale, il cui titolo originale avrebbe dovuto essere *Teoria degli Invarianti*, proprio a sottolineare la ricerca di equazioni che non cambiavano forma nel passaggio tra diversi sistemi; fu poi Max Planck a suggerire la parola *relatività*, per indicare la trasformazione delle leggi fisiche tra osservatori in moto *relativo* tra loro.

Non ci soffermeremo ora sulla trattazione delle forme più comuni che la simmetria assume nel quotidiano, per dare spazio ad alcuni aspetti di questa proprietà intrinseca ai fenomeni e ai corpi che ci circondano, i quali sorgono da un punto di vista differente. Per seguire la logica della trattazione, suddivisa in tre parti principali che si contraddistinguono per la prevalenza degli aspetti artistici, piuttosto che matematici o fisici, incominceremo con il presentare uno degli artisti più noti per le sue opere di grafica e per il suo interesse per il conflitto tra apparenza e realtà: Maurits Cornelis Escher.

1. M.C. ESCHER (1898 – 1972)

L'origine dell'interesse di Escher per semplici figure spaziali geometriche come ad esempio poliedri regolari, spirali spaziali e anelli di Möbius, risiede nell'ammirazione per le forme cristalline esistenti in natura: suo fratello era difatti professore di geologia e si occupava tra le altre cose di cristallografia¹.

Una delle proprietà più evidenti dei cristalli è il fatto che spesso, in natura, li troviamo in formazioni compatte, ma ciò che ci interessa è in particolare il modo in cui sono disposti gli atomi e le molecole all'interno del cristallo. La struttura molecolare di un cristallo presenta una vasta gamma di configurazioni atomiche regolarmente distanziate; essa può essere considerata a tutti gli effetti come un motivo ripetuto all'infinito in ogni direzione, fino a riempire lo spazio. L'equivalente bidimensionale di tale struttura è un disegno sul piano, in cui una configurazione si ripete regolarmente in almeno due direzioni. Ed è proprio di questi disegni "periodici" che si occupò l'artista e grafico olandese nei suoi numerosi studi per la divisione regolare del piano in cui una piccola parte viene traslata in direzioni diverse riempiendo l'intero spazio.



1. *Cristallo* (1947)

¹ Scienza sperimentale che si occupa di determinare la disposizione degli atomi nei solidi. In passato, era lo studio scientifico dei cristalli.

Tuttavia, mentre Escher si occupava di creare nuove strutture regolari partendo dal solo foglio bianco, l'interesse dei matematici per i disegni periodici era dettato da una ricerca fondamentalmente diversa: essi si chiedevano quali proprietà rimanessero invariate dopo che certi oggetti avevano subito una determinata trasformazione geometrica. E se l'oggetto era un motivo periodico nel piano, ci si chiedeva quali spostamenti geometrici – isometrie – sovrapponevano esattamente il motivo a se stesso; il motivo che subisce il movimento viene definito *invariante* e gli spostamenti sono detti *simmetrie* del motivo, della configurazione o della struttura. L'insieme di tutte le simmetrie di una data configurazione viene detto *gruppo* di simmetria, il quale può quindi essere analizzato indipendentemente da altre strutture.

Anche se inconsapevolmente, è però certo che Escher abbia contribuito in modo sostanziale, attraverso i suoi disegni e le strutture di sua creazione, a classificare le numerose simmetrie che stanno alla base dei cristalli e in generale dei solidi in natura.

1.1. La vita

Maurits Cornelis Escher nacque nel 1898 a Leenwarden, in Olanda, dove gli anni di scuola furono per lui un incubo, difatti l'unico sprazzo di luce era rappresentato dal disegno, seppur non si mostrasse brillante. Iniziando già a sperimentare incisioni su linoleum, una volta completate le scuole inferiori nonostante fosse stato rimandato, Maurits nel 1919 si iscrive alla scuola di Architetture ed Arti decorative ad Haarlem dove frequenta la facoltà di architettura per volere del padre, ingegnere civile, per poi prediligere le arti decorative sotto la guida di Samuel Jessurun de Mesquita. A partire dal 1922, specializzandosi in incisioni su legno, Escher intraprende lunghi viaggi in Spagna, restando affascinato dall'Alambra (castello moro del XIV secolo), e in Italia dove vivrà fino al 1935 quando il clima politico sotto Mussolini divenne insopportabile. Dopo alcuni anni in Svizzera e Belgio, l'artista fece ritorno nel 1941 in Olanda, dove produsse alcune delle sue opere più conosciute.

1.2. Le fasi artistiche

L'arte di Escher, fino al 1937, può essere definita **pittorica**; dal 1937 in poi, **razionale**. Il percorso di evoluzione pittorica porterà l'artista ai temi più alti della sua arte, quali simmetrie, strutture matematiche, continuità e infinito, rappresentazione della terza dimensione sul piano.

1937 – 1945: **Periodo delle metamorfosi** (*Metamorfosi I, Giorno e notte, Lo specchio magico*)

1946 – 1956: **Periodo dei quadri in prospettiva** (*San Pietro, Torre di Babele, Sopra e sotto*)

Alla fine (1955): semplici figure spaziali geometriche, poliedri regolari, spirali spaziali, anelli di Möbius (*Cristallo, Stelle, Planetoide Tetraedrico, Striscia di Möbius*)

1956 – 1970: **Periodo delle approssimazioni all'infinito** (*Sempre più piccolo, Limite del cerchio, Serpenti*)

Rientrano in questo periodo anche le figure impossibili (*Convesso e concavo, Cascata, Gallerie di stampe*)

1.3. I temi

Il Dualismo

“Il bene non può esistere senza il male e, se si accetta la figura di Dio, bisogna assegnare anche al diavolo un posto equivalente. Vivo di questa dualità. ... La mia opera non ha nulla a che fare né con gli esseri umani, né con la psicologia. Non so proprio che farmene con la realtà; la mia opera non ha nulla a che fare con la realtà. So che si è obbligati a contribuire a che tutto volga al meglio, ma l'umanità non mi interessa. Sono timido e mi riesce difficile andare d'accordo con gli altri. Non mi è mai piaciuto uscire... perché bisogna sempre mettersi sotto il naso la realtà? Perché non si può mai giocare?”

Nonostante queste parole Escher, nei rapporti con gli altri, era una persona mite e sincera, che non poteva, né tantomeno voleva, far del male a nessuno. Questo sottolinea la dualità, la quale si realizza nelle sue opere nei contrasti ad incastro e tra bianco e nero, e il contrasto della sua personalità.

Nelle stampe precedenti al 1937 ritroviamo temi quali paesaggi mediterranei e dell'Italia del Sud, ma non viene comunque cercato tanto il lato pittorico quanto, piuttosto, la struttura. In seguito si può riscontrare una netta impronta matematica, difatti non si occupa più di strutture spaziali analiticamente; non lascia lo spazio intatto come lo trova, ma realizza una sintesi nella quale diversi spazi appaiono, nello stesso tempo, in uno e unico quadro con logica convincente.

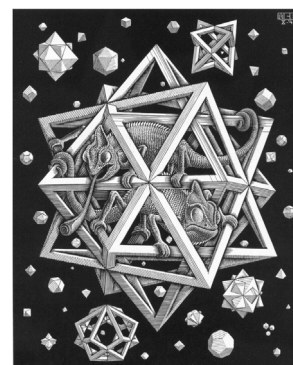
L'attenzione per figure e forme strettamente matematiche si svilupperà solo più tardi e si fonderà, come già illustrato, sull'ammirazione delle strutture dei cristalli.

Struttura dello spazio:

- ❖ Paesaggi
- ❖ Compenetrazione di mondi
- ❖ Solidi matematici astratti



2. Drago (1952)



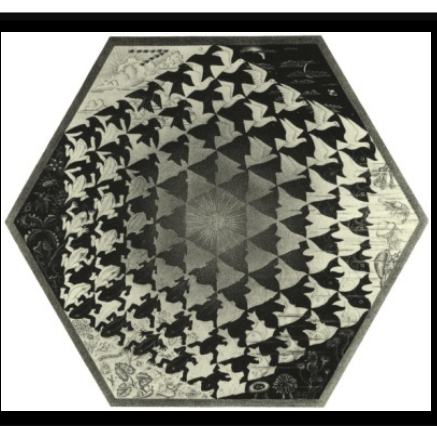
3. Stelle (1948)

Struttura del piano:

- ❖ Metamorfosi
- ❖ Cicli
- ❖ Approssimazioni all'infinito

Relazione tra spazio e superficie in rapporto all'immagine:

- ❖ Essenza della rappresentazione (spazio conflittuale - superficie)
- ❖ Prospettiva
- ❖ Figure impossibili



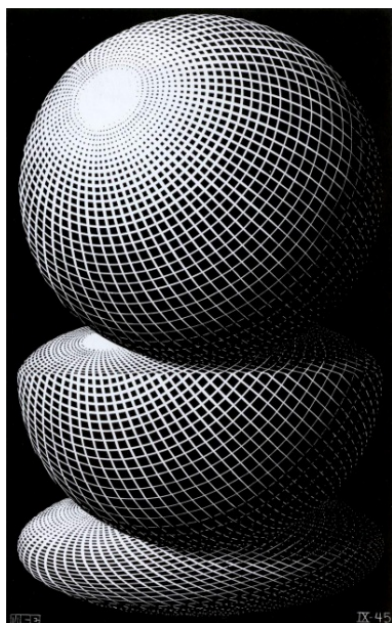
4. Verbum (1942)

5. Salita e discesa (1960)

1.4. La Gestalt ed Escher

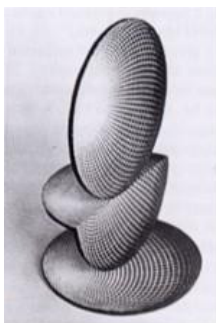
Seppur si sia d'accordo sul fatto che M. C. Escher non sia un artista catalogabile, tuttavia possiamo trovare nei suoi lavori alcuni stretti collegamenti con una delle più importanti teorie della visione del '900, la Gestalt. Con Psicologia della Gestalt o della Forma si intende una corrente di studio sviluppatasi prima a Berlino e poi negli Stati Uniti tra il 1912 e il 1938, il quale ambito principale di studio era la *percezione*.

Il *Principio Fondamentale* su cui si basa tale studio, condotto principalmente da Wertheimer, Köhler, Koffka e Lewin, afferma che nel processo percettivo di conoscenza e di organizzazione delle forme, i dati fondamentali della visione vengono colti entro totalità strutturate, relazionandoli quindi ad un ambiente o ad un determinato contesto (da qui il termine Gestalt che significa Forma).



6. Tre sfere (1945)

Il nostro mondo visivo non è più quindi pensato come costituito da sensazioni isolate, ma da “oggetti”; altro fondamento di questa corrente di pensiero è il *Principio della Piegatura* o Buona Forma (Gestaltung), che mette in evidenza la nostra tendenza a cogliere configurazioni quanto più possibile semplici, omogenee, chiuse, simmetriche. Questo discorso riassume alcuni degli stessi canoni secondo i quali, ad esempio, le costruzioni “impossibili” di Escher ci appaiono possibili, e addirittura realistiche; la nostra mente tende a conformare tutto ciò che vediamo a qualche struttura ben conosciuta e di cui possiamo fare esperienza, senza prestare attenzione al contenuto del disegno o della stampa, privato di ogni interpretazione (si veda ad esempio *Tre sfere*). Alcuni dei fattori che consentono la genesi delle forme ottiche sono la *somiglianza*, *chiusura*, *simmetria*, *tridimensionalità*, *esperienza*.



La psicologia della Gestalt, pur nella validità dei suoi risultati, è stata in seguito sottoposta a una revisione critica che ha rivalutato il ruolo attivo dell'osservatore nell'atto percettivo.

2. ANALISI DI UN'OPERA - Pretentoonstelling

Secondo Escher, in *Galleria di stampe*, vengono raggiunti i confini estremi del suo pensiero e della rappresentazione. Se consideriamo la simmetria come uno dei più alti gradi di perfezione, possiamo mostrare come tale opera contenga in sé più di ciò che appare ad un primo sguardo.

2.1. Descrizione dell'opera

Prententoonstelling, litografia², 1956

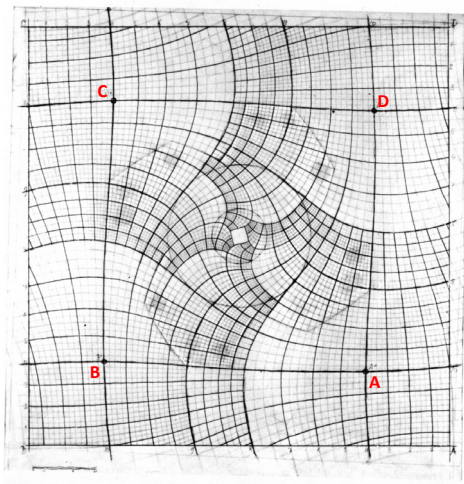


Figura 7

chiusa, a forma di anello, la quale non ha né inizio né fine. Inizialmente l'artista aveva ideato una griglia di dilatazione che implicasse linee rette, ma in seguito ha intuitivamente deciso di adottare linee curve – “In this way the original small squares could better retain their square appearance.”³ -. Dopo numerosi tentativi Escher è giunto al reticolo di Fig. 7, che presenta un'evidente particolarità: se si segue il percorso A, B si nota che i “rettangoli” che costituiscono la griglia si dilatano di un fattore 4 ; allo stesso modo, se si segue la griglia in senso orario intorno al centro e si ritorna al punto di partenza, la griglia si sarà espansa di un fattore $4^4 = 256$. Per ottenere il risultato desiderato, Maurits scelse poi un'immagine di

tipo ricorsivo da inserire nella griglia. Questa scena rappresenta un uomo in una galleria di quadri, tra cui ve ne è appeso uno raffigurante una città mediterranea tra i cui edifici ve ne è uno identico al

La presente litografia [Fig. 8], detta anche Galleria di stampe, rappresenta un giovane che si trova in una galleria dove sono messe in mostra alcune opere dello stesso autore; tra di queste ve n'è una rappresentante una città di porto mediterranea, e nel momento in cui l'uomo scorre con l'occhio il dipinto da sinistra in alto verso destra in basso, egli scorge tra gli edifici la stessa galleria di stampe in cui si trova lui. Al centro della litografia, una macchia bianca contiene il monogramma e la firma di Escher.

Per comprendere meglio la natura di questo quadro e delle dilatazioni al suo interno, analizziamo il procedimento logico che Escher ha seguito in tale realizzazione. Quest'ultimo ha assunto, come scheletro del quadro un reticolo che marca una dilatazione



Figura 8

² Dal greco *lithos*, 'pietra' e *gráphein*, 'scrivere', la litografia è un procedimento di stampa inventato nel 1798 dal tedesco Aloys Senefelder che utilizza come matrice una superficie perfettamente piana, priva di rilievi: la distribuzione dell'inchiostro sulla lastra viene ottenuta mediante opportuni trattamenti chimici. Senefelder scoprì che se si eseguiva un disegno su una lastra di pietra calcarea con una matita grassa e poi si stendeva un inchiostro a base grassa sulla pietra bagnata, le parti disegnate trattenevano l'inchiostro, mentre le altre zone della lastra lo respingevano; il disegno poteva dunque essere riprodotto premendo contro la lastra, a mezzo di un cilindro, un foglio di carta adatta.

³ Bruno Ernst, *Lo specchio magico di M.C. Escher*, p.33.

primo, ridotto 256 volte, in cui un uomo osserva anch'egli un quadro... Attraverso quattro differenti studi, uno per ogni angolo dell'opera, Escher è giunto infine al noto risultato di Fig. 8.

Proviamo ora ad immaginare la figura di partenza, non soggetta ad alcuna distorsione, come posta nel piano complesso \mathbb{C} , la cui origine si trovi al centro della scena.

2.2. Insieme \mathbb{C} , Esponenziale complesso

Il piano complesso, detto anche Piano di Gauss⁴, è un ausilio per visualizzare i numeri complessi, i quali sono solitamente indicati con z , dove $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$ rispettivamente parte *reale* e *immaginaria*, e i è l'unità immaginaria, cioè $\sqrt{-1}$, un “simbolo soggetto alla legge fondamentale $i^2 = -1$ ”⁵. Se interpretati come vettori, questi sono costituiti da un'intensità ρ (detto anche *modulo* del numero complesso), tale che $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, e da un argomento $\theta = \operatorname{arg}_{\frac{y}{x}}$ (detto anche *anomalia*), che rappresenta l'angolo formato dal vettore e il semiasse positivo orizzontale del piano. Il numero complesso può dunque essere riscritto in forma trigonometrica, cioè $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Va aggiunto per chiarezza che due numeri complessi z_1 e z_2 sono uguali solo se $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

Strettamente legato al campo⁶ \mathbb{C} è il Teorema Fondamentale dell'Algebra, il quale asserisce che *ogni polinomio di grado n , $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ può essere scomposto nel prodotto di esattamente n fattori, $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono numeri complessi, radici dell'equazione $f(x) = 0$.*

Inoltre, dal momento che i numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri complessi, appare lecito estendere la funzione esponenziale al campo \mathbb{C} conservandone le proprietà algebriche formali: abbiamo così che $e^z = e^x \cdot e^{yi} = \rho \cdot e^{i\theta}$ che può essere riscritta come $e^z = e^x(\cos \theta + i \sin \theta)$ in virtù della formula di Eulero⁷ da cui deriva l'identità che ha preso il nome dello stesso matematico, cioè $e^{\pi i} + 1 = 0$.

La funzione esponenziale complessa, che mappa ogni retta nel piano complesso in una spirale logaritmica con centro nell'origine, è una funzione con periodo immaginario $2\pi i$, di cui si ripropongono di seguito alcune proprietà:

- ❖ Modulo: $|e^z| = e^x$
- ❖ Argomento: $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$
- ❖ $e^z \neq 0$ Analogamente a quanto avviene in campo reale, l'esponenziale non si annulla. Invero risulta che $e^z = 0$ se e solo se si ha contemporaneamente che $\sin \theta = \cos \theta = 0$ e ciò non può verificarsi.
- ❖ $\frac{d}{dz} e^z = e^z$

⁴ La creazione del piano è da attribuire anche al contemporaneo Jean-Robert Argand; per questo motivo viene talvolta chiamato Piano di Argand-Gauss.

⁵ Citazione da “Che cos'è la Matematica?”, Cap. 2 § 5.1.

⁶ Insieme chiuso di numeri in cui le operazioni cosiddette razionali – addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione – possono essere eseguite senza restrizioni e non conducono mai fuori di questo dominio.

⁷ La formula è dimostrata in allegato.

Tale funzione complessa si dice *olomorfa*, dal momento che è definita in un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed è infinitamente differenziabile in ogni suo punto, il che equivale a dire che essa è approssimabile nell'intorno di ogni punto con una funzione lineare.

Le trasformazioni più comuni che ritroveremo in seguito, riguardo l'esponenziale complesso, sono:

- ❖ Dilatazione: $f(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$
- ❖ Rotazione: $f(z) = e^{i\theta}z$ con $\theta \in \mathbb{R}$
- ❖ Traslazione: $f(z) = z + a$ con $a \in \mathbb{C}$
- ❖ Dilatazione e rotazione: $f(z) = az$ con $a \in \mathbb{C} \neq 0$

2.3. Genesi matematica di “Galleria di stampe”

Dovrà evidentemente valere la relazione $f(256z) = f(z)$ con $z \in \mathbb{C}$, in cui il prodotto tra un numero reale ed uno complesso rappresenta una dilatazione. In questo piano, se partiamo da un prefissato punto p e seguiamo un ideale percorso quadrato, terminiamo nuovamente nel punto p . Ciò può sembrare banale, ma dà vita ad un fatto curioso se andiamo a tracciare lo stesso percorso sulla griglia curva. Prendiamo come origine il punto A e disegniamo un quadrato di lato 5: il percorso apparirà chiuso; ma se applichiamo lo stesso procedimento per un quadrato di, ad esempio, lato 7, ci accorgiamo che il punto A finisce nel punto A' prossimo al centro della griglia. Questo significa che, se avessimo assegnato ad ogni punto un valore 0 od 1, oppure bianco o nero, il valore del punto A e del suo trasformato A' dovrebbero essere gli stessi; possiamo quindi definire $\gamma = \frac{A}{A'}$ con $\gamma \in \mathbb{C}$. Le misurazioni fatte sul quadro di Escher ci hanno portato a dire che $|\gamma| \cong 20$ e $\theta \cong 3$, dove θ è l'argomento in radianti di γ .

È dunque possibile ricostruire il centro della litografia, lasciato bianco dall'autore, in modo che il quadro, ruotato di circa $160^\circ (\sim 3 \text{ rad})$ in senso orario e ingrandito circa 20 volte, dia vita ad un effetto Droste⁸. Allo stesso modo è possibile ricostruire ciò che sta al di fuori della cornice del quadro, estendendo la griglia all'infinito.

Per una migliore analisi matematica, iniziamo con il definire una funzione g sullo spazio della griglia curva, analoga a quella f utilizzata per l'immagine non distorta, tale che $g(\gamma w) = g(w)$ con $w \in \mathbb{C}$. Cerchiamo ora di stabilire quale sia la mappa che trasforma il piano di linee rette in quello della griglia utilizzata da Escher per il suo lavoro. Se si vede il reticolo iniziale come una funzione esponenziale, si può farne il logaritmo così che l'invarianza in seguito ad una dilatazione di fattore 4 si trasforma in un'invarianza in seguito a traslazione; se si moltiplica tale mappa per un valore $\alpha = \frac{2\pi i}{2\pi i + \ln 256}$, corrispondente ad una rotazione e dilatazione, e si applica nuovamente l'esponenziale, si arriva ad avere lo spazio

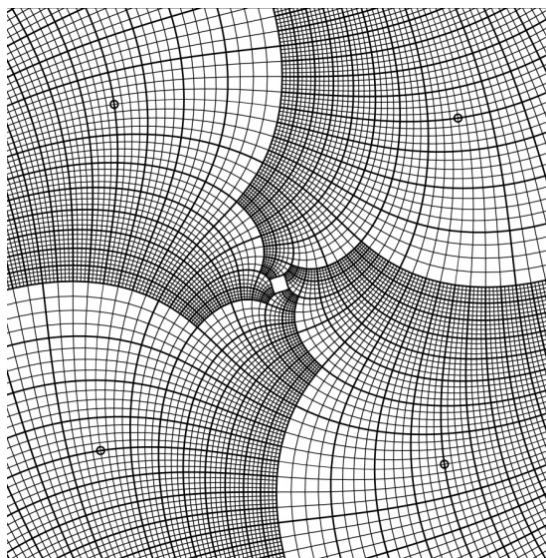


Figura 9

⁸ Termine olandese per un particolare tipo di pittura ricorsiva in cui un'immagine possiede una piccola immagine di sé stessa, localizzata dove dovrebbe trovarsi se si trattasse di un'immagine reale; questa piccola immagine contiene a sua volta una versione ancora più ridotta di sé stessa; idealmente, questo processo può essere reiterato un numero infinito di volte.

curvo che Escher cercava [Fig. 9]. Ovviamente quello che l'artista aveva disegnato era un tentativo di riprodurre una mappa conforme, cioè una trasformazione tale che, considerato un qualsiasi punto z_0 , lasci invariato l'angolo formato dalle curve passanti per z_0 ; esse preservano la forma di figure infinitesimamente piccole, ma non necessariamente le loro dimensioni.

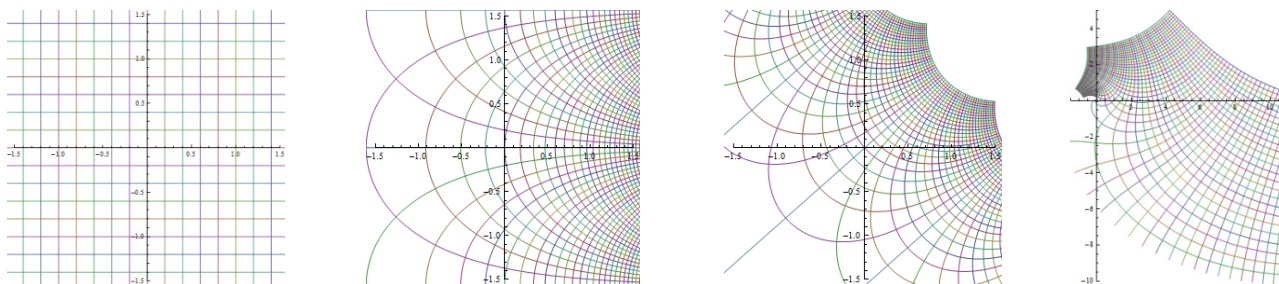
Riportando le trasformazioni eseguite nel piano abbiamo:

$$f(z) = z \rightarrow \ln z \rightarrow \alpha \ln z \rightarrow e^{\alpha \ln z} = z^\alpha = g(w)$$

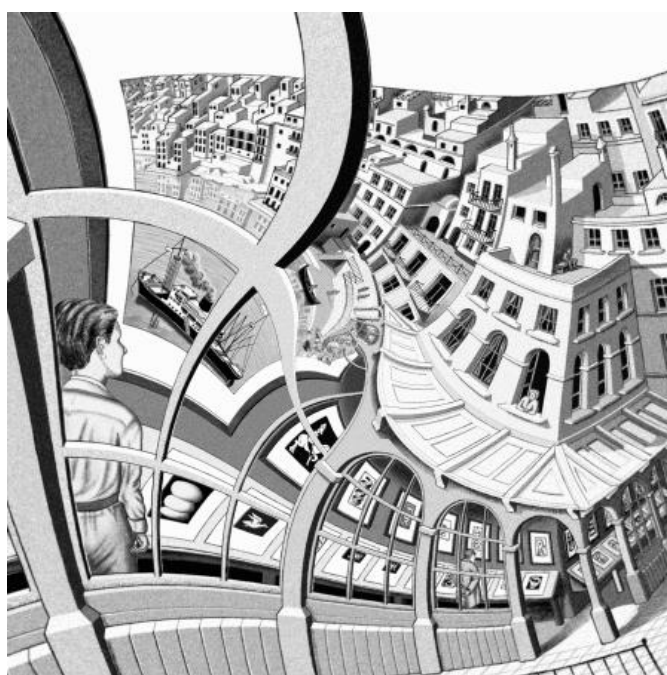
Va ricordato che la mappa che le precedenti trasformazioni matematiche ci hanno permesso di costruire appare sicuramente più regolare e permette un ingrandimento infinito della griglia, consentendoci dunque di ricostruire la parte di immagine che Escher aveva occupato con il suo monogramma, tuttavia è anch'essa incompleta. Difatti nell'origine degli assi la mappa non è definita, il che appare evidente avendo già detto che per un generico numero complesso z , $e^z \neq 0$.

Nonostante ciò, come avevamo osservato introducendo la litografia, abbiamo di fronte a noi uno splendido esempio di simmetria rispetto ad una precisa trasformazione nel piano complesso, che lascia invariata la figura per un numero infinito di volte. Volendo calcolare con esattezza tale trasformazione, si potrebbe ottenere il numero complesso γ tramite l'applicazione delle tre trasformazioni, illustrate sopra, ai periodi di ciascuna griglia.

Se l'immagine non deformata ha periodo 256, si avrà $4^4 \rightarrow \ln 4^4 \rightarrow \alpha \ln 4^4 \rightarrow e^{\alpha \ln 4^4} = \frac{2\pi i \ln 256}{e^{2\pi i + \ln 256}} = e^{(3,1173+2,7511i)}$ che giustifica la dilatazione di fattore 22,58 e la rotazione di 157° illustrate precedentemente.



10. Passaggi: trasformazioni del piano complesso ottenute con il programma Mathematica



11. Immagine ottenuta utilizzando la mappa conforme

3. SIMMETRIA FISICA

La simmetria è in generale qualcosa capace di unificare diversi campi del sapere, mostrando come processi naturali, quanto mentali propri dell'essere umano, siano soggetti a quest'idea di rigorosità e ricorsività. Per dimostrare questo, partiamo dall'esponenziale che ci ha permesso di costruire una mappa invariante in seguito ad un prodotto complesso per un'opera d'arte, per arrivare a definire la simmetria in campo fisico.

3.1. Funzione d'onda ψ e simmetrie di Gauge

Nel 1924, meditando sulle simmetrie della natura, Louis de Broglie pensò di estendere alle particelle il dualismo onda-corpuscolo che era stato teorizzato e verificato per la luce, ottenendo interferenze di elettroni che dimostravano di comportarsi come vere e proprie onde. L'anno seguente, il fisico e matematico austriaco Erwin Schroedinger (1887 – 1961) riformulò questa teoria nella nota Equazione di Schroedinger, che diede vita alla meccanica ondulatoria; l'enorme importanza di questo contributo sta nelle soluzioni dell'equazione, che sono le cosiddette Equazioni d'Onda (ψ), che descrivono lo stato fisico di un sistema quantistico e tutte le sue proprietà, cioè le posizioni e le quantità di moto dei corpi interni al sistema. Ovviamente, sulla base del Principio di Indeterminazione di Heisenberg ciò non è possibile, dunque queste funzioni d'onda, che hanno andamento sinusoidale, indicano un'ampiezza di probabilità. Tale concetto di funzione d'onda non ha un corrispettivo fisico reale, ma il fisico Born ne trovò sì un significato legato all'esperienza, prendendo il quadrato del modulo della funzione ψ , che rappresenta la probabilità di trovare una particella in un determinato punto; la funzione ψ , di cui è nota la variazione nello spazio e nel tempo, è una funzione di tipo complesso, pertanto è ovvio che il quadrato del modulo – in senso complesso – è un numero reale. Il risultato a cui giunse Schroedinger fu di fatto lo stesso a cui arrivò Bohr per una strada del tutto diversa: il primo aveva dimostrato che vi sono alcune distanze dal nucleo in cui la probabilità di trovare un elettrone è maggiore rispetto ad altre, mentre il secondo concluse che i raggi delle orbite degli elettroni assumevano valori discreti e non continui: entrambi avevano spiegato il concetto di orbitale.

Consideriamo quindi una funzione d'onda, ψ , di un certo processo, tale che $|\psi|^2$ indica la probabilità che esso si verifichi; abbiamo che, definita una funzione d'onda $\psi' = \psi e^{i\Delta}$, dove Δ è costante, $|\psi|^2 = |\psi'|^2$. Ciò equivale a dire che le leggi fisiche non cambiano se la fase della funzione d'onda è variata di una costante arbitraria. Difatti il prodotto complesso applicato ad una funzione ψ , che equivale ad una rotazione, corrisponde nel caso della meccanica quantistica ad una simmetria del gruppo di Gauge.

La teoria di Gauge è stata elaborata dal matematico tedesco Weyl (1885 – 1955) nel decennio tra il 1918 e il 1928, ed è strettamente basata sul concetto di invarianza: egli sosteneva che fosse possibile effettuare trasformazioni di simmetria solo in una particolare e limitata regione dello spaziotempo, senza interessare il resto dell'universo. Partendo da un'analisi geometrica, Weyl arriva a teorizzare queste invarianze, che sono sostanzialmente proprietà di simmetria, le quali sono importanti nella misura in cui implicano sempre una legge di conservazione.

Difatti, un'analisi più accurata di questa invarianza rispetto ad una variazione della fase della funzione, ci permette di collegarla ad una conservazione della carica elettrica dal momento che se si calcola l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\tau$ (dove τ indica il volume del solido preso in considerazione) si otterrà il valore 1, il che determina la certezza di trovare un elettrone in un volume infinito stabilendo anche la conservazione di tale carica.

3.2. Definizione di simmetria e relazione con i principi di conservazione

Il sopracitato Hermann Weyl ha dato per primo una definizione di simmetria che si adattasse sia alla matematica che alla fisica, per quanto semplice che fosse, e che Feynman riporta come: “... *a thing is symmetrical if there is something we can do to it so that after we have done it, it looks the same as it did before*”.

Nella fisica, difatti, la simmetria di un evento descrive la sua invarianza in seguito ad una traslazione spaziale, temporale, una rotazione di un angolo prestabilito, una riflessione spaziale, o uno scambio di atomi identici o particelle identiche. Un caso interessante è anche quello dell'invarianza delle leggi fisiche in differenti sistemi in moto rettilineo uniforme, che è illustrata nel principio di relatività galileiana. Il termine “simmetria” acquista quindi un significato molto vicino a quello di “equivalenza”: se vi sono trasformazioni o cambiamenti in seguito ai quali le leggi fisiche si conservano, di conseguenza non sarà possibile distinguere sistemi isolati che differiscono per una di queste trasformazioni.

Nello specifico, ciò che garantisce la simmetria di un fenomeno, sarà una quantità che rimane invariante secondo una precisa regola, detta Principio di Conservazione: tale invariante, dunque, assumerà lo stesso valore, indipendentemente dalle operazioni di simmetria applicate al sistema. La traslazione spaziale, ad esempio, assicura la conservazione della quantità di moto, la traslazione temporale lascia invariata la quantità di energia interna al sistema, mentre una simmetria rispetto ad una rotazione è direttamente legata alla conservazione del momento angolare.

La dimostrazione che i tre principi di conservazione della meccanica classica qui citati sono in corrispondenza con i tre principi di simmetria dello spazio tempo, si deve alla matematica ebrea tedesca Amalie Emmy Noether (1882 – 1935) che, contemporaneamente a Weyl mise appunto in luce la profonda connessione tra simmetrie e leggi di conservazione.

“Ho sempre teso, nel mio lavoro, ad unire la verità alla bellezza, ma se dovessi scegliere tra l'una e l'altra sceglierei la bellezza.” *Hermann Weyl*

3.3. Invarianti nella Relatività Ristretta

Ulteriori esempi di simmetria al di fuori della meccanica classica si possono trovare nella Teoria della Relatività einsteiniana (1905).

Quando nel 1904 Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) introdusse le cosiddette Trasformazioni di Lorentz per rimuovere le contraddizioni esistenti tra elettromagnetismo e meccanica classica e spiegare i risultati nulli dell'esperimento di Michelson e Morley tramite l'introduzione del fenomeno della contrazione delle lunghezze, queste non furono del tutto comprese perché non rappresentavano concetti intuitivi. La società scientifica dell'epoca, accanto alle invarianze implicite risultanti dal lavoro di Lorentz, si rifiutava di vedere anche la simmetria di fondo che era presente, sia nelle equazioni che in natura, nel fenomeno dell'elettromagnetismo e che era formalizzata nelle simmetrie di Gauge. La simmetria stessa non fu apprezzata fino alla fine del diciannovesimo secolo.

Dunque, per quanto riguarda le Trasformazioni di Lorentz, fu necessaria una rivoluzione concettuale quale fu la teoria della relatività, perché esse fossero riscoperte. Tali trasformazioni, che sono alla base della formulazione matematica della relatività ristretta, servono per determinare, a partire dalle coordinate in un sistema

$A(t, x, y, z)$, le coordinate che un sistema in moto relativo attribuisce allo stesso evento nello spaziotempo, cioè

$$B(t', x', y', z'). \text{ Esse sono: } \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Apparentemente analoghe alle equazioni delle rotazioni, le Trasformazioni di Lorentz implicano una trasformazione del concetto di tempo che diventa dipendente dalla velocità di un sistema; queste equazioni ci permettono comunque di individuare alcune grandezze che in fisica sono dette *Invarianti di Lorentz*, cioè quantità che assumono lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Il più noto invariante nell'ambito della relatività è la *separazione*⁹, o meglio il quadrato della separazione. Se nello spaziotempo di Minkowski¹⁰ la geometria euclidea non è valida, è però logico pensare di poter fare un parallelo tra la quantità $x^2 + y^2 + z^2$ che rappresenta la distanza spaziale tra due eventi qualsiasi in uno spazio euclideo, e l'espressione $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ la cui radice quadrata indica la *separazione* spaziotemporale nello spazio di Minkowski.

Quest'ultima non è né una distanza né un tempo, ma una sorta di fusione¹¹ dei due che acquista importanza dal fatto che è indipendente dal mondo in cui vengono fatte le osservazioni; è qualcosa di assoluto, una sorta di proprietà intrinseca che mette in relazione due eventi. In conclusione, in seguito ad una rotazione dello spaziotempo, che non va confusa con una rotazione degli assi di un piano cartesiano, l'unica quantità che ci permette di definire in modo univoco una coppia di eventi, dunque una distanza nello spazio e nel tempo, è quella della separazione che si può interpretare anche come una simmetria tra mondi in movimento tra loro.

Seppur si parte dal presupposto, ormai confermato da rigorose dimostrazioni logiche e da dati empirici, che la meccanica classica non sia altro che un'approssimazione della meccanica relativistica per velocità molto piccole, appare comunque rivoluzionario il contributo apportato dagli americani Lewis e Tolman nel 1909 trovando l'espressione relativistica della quantità di moto in funzione della velocità. Ciò significa che il principio della conservazione della massa, come quello della quantità di moto non sono più validi nella concezione relativistica: viene a mancare quella simmetria di base che dà origine ad un'invarianza. Tuttavia si può ancora parlare di *covarianza*, un concetto che per alcuni aspetti è simile a quello che Feynman definisce come *quasi-simmetria*¹²;

difatti, secondo il sistema di equazioni $\begin{cases} m' = \frac{m+\frac{vq}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ q' = \frac{q+mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$, strutturalmente equivalenti alle trasformazioni di Lorentz,

quantità di moto (q) e massa (m) si conservano in un sistema a condizione che si conservino anche in un altro sistema in moto uniforme relativo. Riprendendo poi l'espressione della separazione $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$, possiamo

⁹ Il termine *separazione* è dovuto al Professore Whitehead, come riporta Durell, Chapter VI.

¹⁰ Oggetto matematico utile a modellizzare lo spaziotempo della relatività ristretta.

¹¹ "D'ora in poi il solo spazio e il solo tempo sono destinati a dissolversi, diventando semplici ombre, e solo una forma di unità tra l'uno e l'altro conserverà una realtà indipendente" – Hermann Minkowsky, Raum und Zeit, Physikalische Zeitschrift, III (1908), p.104.

¹² La legge fisica, capitolo 4, p.120.

definire un altro invariante sostituendo al posto del tempo un'altra quantità scalare, la massa, e al posto dello spazio un'altra quantità vettoriale, la quantità di moto, ottenendo così l'invarianza dell'espressione $c^2 \Delta m^2 - \Delta q^2$.

4. CONCLUSIONE

Con questo collegamento tra argomenti apparentemente distanti tra loro, si è voluto fare un piccolo passo nella direzione della ricerca odierna, cioè quella rivolta all'unificazione non solo delle scienze ma dell'intero sapere, cercando di mettere in luce aspetti comuni che rendono ogni legge o regola un caso particolare di una struttura più ampia, la quale, interpretata in diversi modi, dà vita a quelli che noi concepiamo come saperi differenti. Si è dimostrato infatti che la griglia preparatoria di una nota opera conteneva inconsciamente simmetrie che, tramite un centro unificatore quale è la matematica, ci hanno permesso di giungere fino ai principi di conservazione fisici. Scopo ultimo della tesina, tuttavia, è stato quello di illustrare la bellezza e l'eleganza di ragionamenti e procedimenti razionali che ci possono portare nei luoghi più inaspettati, lontani dal sentiero delle convenzioni, senza ammettere alcunché di irrazionale.

Allo stesso tempo, quantità e strutture *invarianti* o *simmetriche* assumono grande importanza poiché sono ciò che di solo è certo nella nostra esperienza e sui cui possiamo costruire la nostra conoscenza, basata così su validi assiomi. E le conseguenti certezze saranno accompagnate dalla bellezza della matematica che vi è alle spalle, la quale è in grado, come abbiamo notato nella ricostruzione della stampa di Escher, di astrarre ciò che è concreto per poi riportarlo alla concretezza, in questo caso visiva.

5. ALLEGATI

5.1. Dimostrazione della Formula di Eulero

L'equazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, dove $z = x + yi$, si può dimostrare ponendo $e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$ per la proprietà delle potenze e utilizzando lo sviluppo in serie di MacLaurin per riscrivere il secondo fattore. Abbiamo dunque che:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$e^{yi} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \dots$$

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)$$

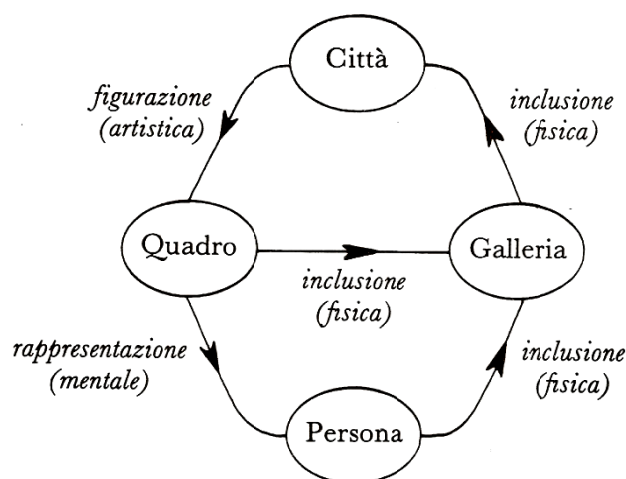
$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

Ricordando che $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ e $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

5.2. Estratto da “Gödel, Escher, Bach” di Hofstadter

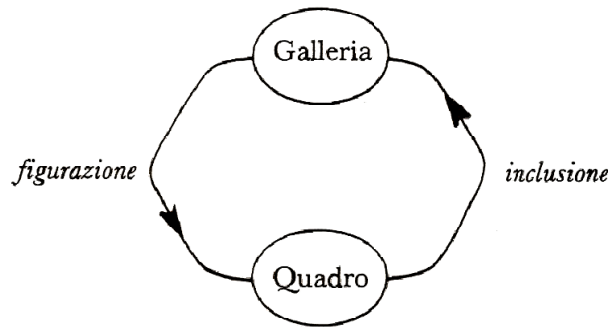
Un vortice di Escher dove tutti i livelli si intersecano

Un'illustrazione straordinariamente bella e tuttavia allo stesso tempo inquietante e stranamente difettosa dell'"occhio" ciclonico di una Gerarchia Aggrovigliata ci è data da Escher in *Galleria di stampe*. Vi possiamo vedere una galleria in cui un giovane, in piedi, guarda un quadro che raffigura una nave nel porto di una piccola città: forse una cittadina maltese, a giudicare dall'architettura, con le sue piccole torri, qualche cupola di tanto in tanto e piatti tetti di pietra, su uno dei quali sta seduto un ragazzo che si riposa nella calura, mentre due piani Sotto di lui una donna, forse sua madre, è affacciata alla finestra del suo appartamento che si trova proprio sopra una galleria in cui un giovane, in piedi, guarda un quadro che raffigura una nave nel porto di una piccola città: forse una cittadina maltese ... Cosa!? Siamo di nuovo allo stesso livello dal quale eravamo partiti, sebbene ogni logica ci imporrebbe di non poterci essere. Tracciamo un diagramma di ciò che vediamo [Fig. 12].



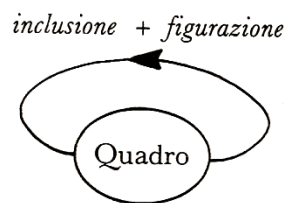
12. Diagramma astratto di Galleria di stampe di M. C. Escher

Questo diagramma indica tre tipi di "essere in". La galleria è *fisicamente nella* cittadina ("inclusionione"); la cittadina è *artisticamente nel* quadro ("figurazione"); il quadro è *mentalmente nella* persona ("rappresentazione"). Ora questo diagramma, anche se può sembrare soddisfacente, in realtà è arbitrario, perché il numero dei livelli indicati è del tutto arbitrario. Si guardi qui sotto un altro diagramma che rappresenta in modo diverso solo la metà superiore del primo [Fig. 13].



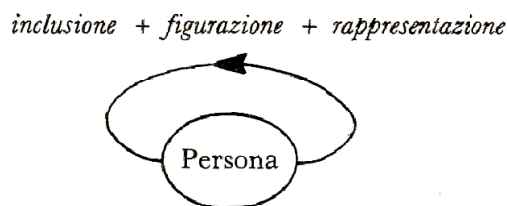
13. Una versione ridotta della figura precedente

Abbiamo eliminato il livello della "cittadina"; da un punto di vista concettuale era utile, ma se ne può fare benissimo a meno. La Figura 13 somiglia molto al diagramma di *Mani che disegnano*: uno Strano Anello a due componenti. Le cesure sono arbitrarie, anche se sembrano naturali alla nostra mente. Questo può essere messo ulteriormente in risalto facendo diagrammi schematici di *Galleria di stampe* ancora più concentrati, come quello di Figura 14.



14. Ulteriore riduzione della figura 13

In questo si vede il paradosso in termini più forti. Ora, se il quadro è "dentro se stesso", anche il giovane è dentro se stesso? A questa domanda si risponde nella Figura 15.



15. Un altro modo di ridurre la figura 13

Noi vediamo dunque il giovane "dentro se stesso", in un buffo senso ottenuto mischiando tre sensi distinti di "essere in".

Questo diagramma ci ricorda il paradosso di Epimenide con il suo autoriferimento a una sola componente, mentre il diagramma a due componenti somiglia alla coppia di enunciati ciascuno dei quali si riferisce all'altro. Non possiamo restringere ulteriormente il ciclo, ma lo possiamo ampliare, decidendo di inserirvi un qualsivoglia numero di livelli intermedi, come "cornice del quadro", "portico", "edificio". Se facciamo così, avremo Strani Anelli a più componenti i cui diagrammi sono isomorfi a quelli di *Cascata* o *Salita e discesa*. Il numero di livelli è determinato da ciò che sentiamo come "naturale" e che può variare a seconda del contesto, dello scopo o della disposizione mentale. Le Mappe di X Centrale (Dogma, Granchio, Ai, Pipa) possono essere viste tutte come

comprendenti Strani Anelli a tre componenti; ma, volendo, si possono tutte contrarre in anelli a due o a una sola componente; quindi nuovamente possono essere espanse in anelli a molte componenti. Dove si percepiscano i livelli è un fatto di intuizione e di preferenza estetica.

Ora, anche noi che osserviamo *Galleria di stampe* siamo forse risucchiati in noi stessi per il fatto che la stiamo a guardare? Niente affatto. Riusciamo a sfuggire a quel particolare vortice perché siamo fuori del sistema. E quando guardiamo il quadro, vediamo cose che il giovane certamente non può vedere, come la firma di Escher, "MCE" nella "macchia" centrale. Sebbene la macchia somigli a un difetto, forse il difetto risiede nelle nostre aspettative, perché in realtà Escher non avrebbe potuto completare quella parte di quadro senza essere incoerente rispetto alle regole secondo le quali stava dipingendo il quadro. Quel centro del vortice è, e deve essere, incompleto. Escher avrebbe potuto renderlo arbitrariamente piccolo ma non avrebbe potuto liberarsene. Quindi noi, dall'esterno, possiamo sapere che *Galleria di stampe* è essenzialmente incompleta, un fatto che il giovane, che è all'interno, non potrà mai sapere. Escher ha quindi dato una parabola pittorica del Teorema di Incompletezza di Gödel. E questo è il motivo per cui i fili del discorso sviluppato da Gödel e da Escher sono così profondamente intrecciati nel mio libro.

6. BIBLIOGRAFIA

Ernst B., “Lo specchio magico di Escher”, Koln, Benedikt Taschen Verlag GmbH (1996)

Rampazzo G., “Disegnare”, Milano, Minerva Italica (2002)

Schattschneider D., “Visioni della simmetria”, Bologna, Zanichelli (1996)

Bononcini V., “Numeri complessi, funzione sinusoidale”, Bologna, Calderoni (1972)

Courant R. e Robbins H., “Che cos'è la Matematica?”, Torino, Bollati Boringhieri (2004)

De Smit B. e Lenstra H.W. Jr., “The mathematical structure of Escher's Print Gallery”, AMS (2003)

Hofstadter D., “Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante”, Milano, Adelphi (2005)

Odifreddi P., “Maurits Cornelis Escher, Arte del puzzle e puzzle dell'arte” (1994)

Bergia S., “Einstein e la Relatività”, Roma-Bari, Laterza (1978)

Durell C., “Readable Relativity”, New York, Harper & Row (2003)

Feynman R., “Lectures on Physics”, New York, Addison - Wesley (1963)

Feynman R., “Sei pezzi meno facili”, Milano, Adelphi (2007)

Feynman R., “La legge fisica”, Torino, Bollati Boringhieri (2007)

Gamow G., “Trent'anni che sconvolsero la fisica”, Bologna, Zanichelli (1966)

Gross D., “Gauge Theory - past present and future?”, Princeton, Chinese Journal of Physics, Vol. 30 n.7 (1992)